Samenvatting

Het wetenschappelijke deel van dit proefschrift vindt u op de voorgaande pagina's. In deze samenvatting zou ik graag op een wat luchtigere manier de inhoud van dit proefschrift uit de doeken doen in de hoop alle lezers aan te spreken.[1] Daarnaast zou ik deze samenvatting ook graag gebruiken om uit te leggen wat ik zo bijzonder vind aan de toepassing van de wiskunde in de natuurkunde. Want hoewel mijn methoden wiskundig van aard zijn, zit er altijd een natuurkundige motivatie achter.[2]

Mathematische fysica

De mathematische fysica is een gebied binnen de wiskunde dat zich bezighoudt met wiskundige vraagstukken die een belangrijke rol spelen in de natuurkunde. Dit heeft door de eeuwen heen geleid tot een nauwe interactie tussen natuur- en wiskunde. In de geschiedenis is het al vaak voorgekomen dat hele wiskundige vakgebieden zijn ontstaan vanuit de natuurkunde. Deze wiskunde is op zichzelf staand doorgaans ook erg interessant en wordt dan ook door wiskundigen vanuit een puur wiskundig perspectief benaderd. Een voorbeeld hiervan is de bewegingsvergelijking van Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (kracht) = (massa) \times (versnelling). \tag{A}$$

Deze vergelijking wordt door natuurkundigen gebruikt om te berekenen welk pad een object zal volgen onder invloed van een kracht. Met pad bedoelen we overigens niet alleen de 'route' die het object aflegt. We bedoelen er ook mee dat we op elk tijdstip weten waar op de route het object zich bevindt. Dit pad hangt natuurlijk wel af van de beginsnelheid en beginpositie van het object. Hoe het object zich vervolgens voortbeweegt, hangt verder alleen af van de kracht die op het object werkt. Preciezer, deze kracht $\vec{F}$ is weergegeven aan de linkerkant van vergelijking (A) en het feit dat de linkerkant gelijkgesteld wordt aan de rechterkant, betekent dat de versnelling van het object alleen wordt bepaald door de kracht.[3] En wanneer we de beginsnelheid en beginpositie van het object weten, is het genoeg op elk volgend moment de versnelling te weten om het pad te bepalen voor latere tijdstippen. Denk hierbij aan een auto die op een bepaald tijdstip met een bepaalde snelheid op een autosnelweg rijdt. U

[1] Mocht u de rest van dit proefschrift abstracte onzin vinden en denken dat het papier waarop het gedrukt is, beter gebruikt kan worden om u in de winter warm te houden door het te verbranden in de open haard (wiskundigen worden hopelijk al warm van de inhoud zodat verbranding niet nodig en zelfs onverstandig is), leest u dan eerst deze samenvatting of scheur deze pagina's eruit alvorens de chemische reactie tot stand te brengen die dit werk omzet in as. Velen van u kunnen de inhoud overigens als droge kost ervaren, waardoor het risico op roetvorming in uw schoorsteen hopelijk wel tot een minimum beperkt blijft.

[2] Wiskundigen zijn het liefst volledig. Deze samenvatting is daardoor wat aan de lange kant. :)

[3] En massa natuurlijk, maar die beschouwen we als constant en vergeten we daarom voor het gemak even. Wat betreft de massa zegt de formule niets anders dan dat je bij zwaardere objecten meer kracht moet uitoefenen om ze dezelfde versnelling te geven.

kunt zich hopelijk misschien wel voorstellen dat we precies weten waar de auto is, wanneer we weten hoeveel de auto harder of langzamer is gaan rijden.

De kracht in vergelijking (A) zou bijvoorbeeld de zwaartekracht kunnen zijn, een aandrijvende kracht, veerkracht, maar ook een elektrische of magnetische kracht. Met vergelijking (A) kunnen we bijvoorbeeld de beweging van een vallend object afleiden door voor de kracht $\vec{F}$ in vergelijking (A) de zwaartekracht te noteren. Wanneer een natuurkundige een natuurkundig proces bestudeert (dat valt binnen het kader waarin vergelijking (A) van toepassing is), dan schrijft hij voor dat proces op wat $\vec{F}$ is. Vervolgens wil hij het pad vinden dat door het object afgelegd wordt. Dit pad wordt gevonden als het pad dat vergelijking (A) oplost.

Vergelijking (A) heet in de wiskunde een *differentiaalvergelijking*. De oplossing van differentiaalvergelijkingen is een wiskundig probleem en dit is een voorbeeld waar wiskunde een rol speelt in de natuurkunde. Het is namelijk zo dat voor elke natuurkundige situatie de formule voor $\vec{F}$ anders is. Dit betekent dat voor elke nieuwe situatie vergelijking (A) weer anders is en opnieuw opgelost moet worden. Het is niet erg efficiënt om voor elke nieuwe situatie opnieuw te gaan bepalen of er een oplossing is (er hoeft er namelijk niet per se een te bestaan en zeker niet voor elk tijdstip) en wat vervolgens die oplossing is. Een wiskundige probeert daarom voor zo algemeen mogelijke $\vec{F}$, dus de precieze vorm van $\vec{F}$ is niet geven, te laten zien dat er een oplossing bestaat, hoe deze oplossing gevonden kan worden en wat voor eigenschappen deze oplossing heeft. Dit doen ze door differentiaalvergelijkingen van een zo algemeen mogelijke vorm te bestuderen. Die differentiaalvergelijkingen hoeven hierbij zelfs niet van de vorm (A) te zijn. De studie van differentiaalvergelijkingen is een erg interessant gebied in de wiskunde, waarvan de antwoorden ook nog eens de natuurkundigen helpen. Kort gezegd, wiskundigen bekijken dus niet specifieke systemen uit de natuurkunde, maar proberen de vraagstukken in een zo algemeen mogelijk kader te bestuderen.[4]

Ik heb met bovenstaand voorbeeld uit de *klassieke* of *Newtoniaanse mechanica* proberen duidelijk te maken waar wiskunde een rol speelt in de natuurkunde en hoe de vragen die een wiskundige stelt in zo'n situatie verschillen van die van een natuurkundige. Vergelijking (A) staat overigens bekend als de tweede wet van Newton, vernoemd naar de Engelse natuur- en wiskundige *Isaac Newton* (1642-1727), en is al meer dan drie eeuwen oud. Sindsdien hebben de natuurkunde en wiskunde reusachtige ontwikkeling ondergaan waardoor de huidige vraagstukken binnen de natuurkunde veel ingewikkelder zijn dan het voorbeeld dat ik hierboven heb geschetst. Mijns inziens is hierbij een goed wiskundig begrip van deze problemen van essentieel belang om de volgende stap te zetten. Het gaat hier niet alleen om het oplossen van bewegingsvergelijkingen maar ook om het creëren van een raamwerk waarbinnen deze natuurkunde beschouwd kan worden, de wiskundige structuur van het probleem. Helaas wijkt door de toegenomen complexiteit de wiskundige formulering vaak zo veel af van

[4] Wiskundigen letten als het ware meer op de abstracte structuur van het probleem. Vaak geven deze structuren veel inzicht.

de natuurkundige dat het voor een rasnatuurkundige lastig is de natuurkunde in deze wiskunde te herkennen. Dat is in dit proefschrift niet anders en dit spijt me dan ook enorm voor mijn natuurkundevrienden.

Dit proefschrift

Na dit uitstapje over de mathematische fysica zal ik wat meer vertellen over de inhoud van dit proefschrift en ik zal dit doen aan de hand van de titel van dit proefschrift: 'Dirac operators, gauge systems and quantisation'. Hierbij zal ik ook meer uitleg geven over de puzzelsstukjes die op de voorkant van dit proefschrift staan afgebeeld. In feite zijn de drie begrippen in de titel - in het Nederlands Dirac-operatoren, ijksystemen en kwantisatie geheten - *ontstaan in de natuurkunde*. Ik zal kort proberen uit te leggen wat de natuurkundige betekenis is van deze begrippen en vertellen hoe de wiskunde met ze aan de haal gegaan is. Hierbij komt ook naar voren hoe de natuurkunde en de wiskunde elkaar beïnvloed hebben.

Dirac-operatoren

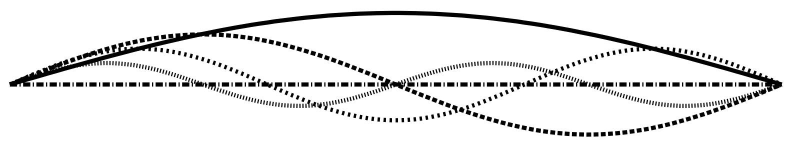
De klassieke mechanica waarover ik hierboven schreef, geeft een goede beschrijving voor de natuurkunde in het alledaagse leven. Echter, op erg kleine schaal, denk daarbij aan schalen die kleiner zijn dan een miljardste meter, gelden er totaal andere wetten. Daar gelden namelijk de wetten van de *kwantummechanica*, die zijn opmars in de natuurkunde begon in de jaren 20 van de vorige eeuw.[5] Twintig jaar eerder had Albert Einstein zijn *speciale relativiteitstheorie* opgeschreven, een uitbreiding van de klassieke mechanica naar situaties waarin snelheden erg hoog zijn. Bij de beschrijving van erg kleine deeltjes die ook erg snel voortbewegen, hebben we daarom te maken met zowel de kwantummechanica als de speciale relativiteitstheorie. Het was *Paul Dirac* die op zoek was naar een geschikte (eerste-orde) kwantummechanische vergelijking die ook voldeed aan de wetten van de speciale relativiteitstheorie. Zijn antwoord was de *Dirac-vergelijking* met als belangrijkste object daarin de Dirac-operator.[6] De Dirac-vergelijking geeft de voortbeweging van (een veld van) deeltjes, net zoals de wet van Newton (A) dat doet voor objecten in de klassieke mechanica. Deze Dirac-operator was geformuleerd voor een vier-dimensionale wereld (drie ruimterichtingen en een tijdrichting), maar kan ook geformuleerd worden voor ruimtes van willekeurige dimensie en vorm. Met deze laatste generalisatie zijn we weer in de wiskunde beland. We bekijken nu immers niet uitsluitend Dirac-operatoren op ruimtes die natuurkundig van belang zijn. Wiskundig gezien heeft de Dirac-operator veel bijzondere eigenschappen. Eén ervan is dat het kwadraat van de Dirac-operator een *Laplaciaan* is. Laplacianen spelen een belangrijke rol

[5] Om er achter te komen op welke schalen de kwantummechanica van toepassing is pakt u een strookje papier dat ongeveer de lengte heeft van de lange zijde van een A4'tje. Als u dit strookje nu 28 keer dubbel vouwt, komt u op de lengteschalen van de kwantummechanica. Probeert u dit maar eens!

[6] In de kwantummechanica noteren natuurkundigen operatoren door boven het symbool ˆ toe te voegen. Op de omslag ziet u een foto van Paul Dirac met dit symbool boven zijn hoofd.

binnen de meetkunde, waarmee de Dirac-operator dus een meetkundige status heeft.

De Laplaciaan is een bijzonder meetkundig object en het belang ervan voor ons verhaal valt misschien het beste uit te leggen aan de hand van een *gitaarsnaar*. Wanneer een gitaarsnaar trilt, dan kunnen we deze trilling opgebouwd zien uit (oneindig veel) "eenvoudigere" trillingen waarvan ik er vier geschetst heb in de figuur hieronder.

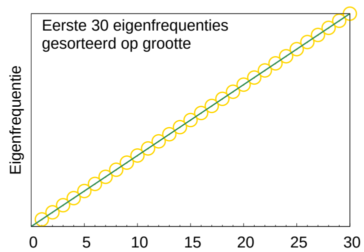


Deze trillingen worden ook wel *eigentrillingen* genoemd. Het bijzondere of "eenvoudigere" aan deze trillingen is dat, op de mate van uitwijking na, de vorm niet verandert bij het trillen. Dit is anders bij trillingen van een andere vorm. Elk van deze eigentrillingen beweegt met een vaste snelheid op en neer (dat wil zeggen, er is alleen beweging in de verticale richting), maar niet elk van de eigentrillingen trilt even snel. Deze snelheid wordt ook wel frequentie genoemd en er geldt hoe meer "toppen" (buiken genoemd) de golf heeft, hoe sneller deze golf trilt in de tijd. De frequentie bepaalt de toonhoogte die we horen, wanneer het geproduceerde gitaargeluid opgevangen wordt door onze oren.[7]

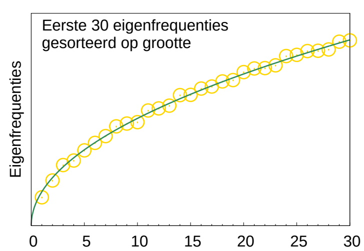
De eigentrillingen worden zo genoemd omdat ze de *eigenfuncties* van de Laplaciaan zijn. Wat dit allemaal betekent, is niet zo van belang. Voor deze samenvatting is het voldoende om te weten dat er een manier is om met de Laplaciaan deze eigentrillingen inclusief de bijbehorende frequentie te bepalen.

We zouden de snaar ook kunnen zien als een meetkundige vorm of object, in feite is de snaar niets anders dan een eindig lijnstuk. Voor andere vormen, zoals driehoeken, cirkelschijven of tetraëders, kunnen we ook met behulp van de Laplaciaan bepalen welke eigentrillingen er voor kunnen komen (waarbij we altijd aannemen dat de rand niet trilt, net zoals bij de gitaarsnaar of bij een trommel). Wat we vervolgens doen is een lijst maken van de eigen*frequenties*. Voor de snaar vinden we dan ongeveer de volgende grafiek:

[7] Wanneer een gitaarsnaar trilt, hoor je dus niet één maar vele toonhoogtes, namelijk de toonhoogtes behorende bij elk van de voorkomende eigentrillingen. Deze tonen verschillen echter altijd een veelvoud van een octaaf van elkaar. Overigens is de trilling met een enkele buik meestal het duidelijkst aanwezig (tenzij men flageoletten speelt) en dit is de daadwerkelijke noot die je speelt. De overige eigentrillingen, waarvan we de frequenties ook wel boventonen noemen, bepalen de klankkleur.



Doen we hetzelfde voor een cirkelschijf (pannenkoek) dan vinden we iets van de vorm:



We zien nu een duidelijk verschil in de vorm van de grafiek en dit heef te maken met het verschil in dimensie. Zo is een lijnstuk een-dimensionaal en een cirkelschijf twee-dimensionaal. Het is precies dit verschil in dimensie dat ervoor zorgt dat de vorm van de grafiek anders is. Met andere woorden, als ik een wiskundige alleen een lijst geef van *alle* eigenfrequenties van de eigentrillingen op het object, dan kan deze zien wat de dimensie is van het object. En zo zijn er nog veel meer eigenschappen die men uit de lijst van eigenfrequenties kan afleiden (maar niet in alle gevallen genoeg om twee willekeurige vormen te kunnen onderscheiden!).

Kortgezegd kunnen we stellen dat de lijst van eigenfrequenties van de Laplaciaan informatie geeft over de eigenschappen van het meetkundige object. Een wiskundige kan zich nu de vraag stellen of we de eigenschappen van het object ook zouden kunnen afleiden door alleen te kijken naar de (oneindige) lijst van eigenfrequenties. Als we ons beperken tot twee-dimensionale vormen, dan is deze vraag ook wel bekend als 'kun je horen wat de vorm van een trommel is?'. Hierbij zien we het twee-dimensionale object als een trommel. Net zoals bij de snaar wordt de klank van de trommel bepaald door de eigenfrequenties die je hoort wanneer je op de trommel slaat. Als de eigenfrequenties de vorm van de trommel zouden bepalen, dan zouden we dus in feite de vorm van de trommel kunnen afleiden uit het geluid dat deze produceert.[8]

[8]Het antwoord op de vraag of je 'kunt horen wat de vorm van de trommel is' is in het algemeen 'nee'. Maar het is opmerkelijk hoeveel eigenschappen we uit de lijst van eigenfrequenties kunnen halen.

Het idee om naar de eigenfrequenties te kijken, is ook het leidende idee binnen de niet-commutatieve meetkunde, behalve dat er daar niet gekeken wordt naar de eigenfrequenties van de Laplaciaan, maar naar die van de Dirac-operator.[9] Hiermee zijn we weer terug bij de Dirac-operator, die dus voor het eerst in de natuurkunde onstond, maar nu ook binnen de meetkunde een belangrijke rol speelt. Een cruciaal resultaat uit de niet-commutatieve meetkunde is dat men door het optellen van de eigenfrequenties van de Dirac-operator een formule vindt die de zwaartekracht beschrijft! Echter, in de natuurkunde interageren deeltjes niet alleen met elkaar door zwaartekracht. Er spelen ook nog andere krachten een rol, zoals de *zwakke* en *sterke kernkracht* en de *elektromagnetische kracht*. Het zijn deze drie krachten die worden beschreven door ijktheorieën.[10] Door het optellen van de eigenfrequenties van de Dirac-operator vonden we eerder alleen de zwaartekracht, niet de andere krachten. Dit kan opgelost worden, zonder bovenstaand principe van het optellen van eigenfrequenties van de Dirac-operator los te laten, door Dirac-operatoren te bekijken op *niet-commutatieve ruimten*. Hiermee zijn we in de niet-commutatieve meetkunde beland.

Niet-commutatieve meetkunde en deel 2 van dit proefschrift

Waar bij meetkunde nog gesproken kan worden over meetkundige objecten zoals bollen, cirkels of tetraëders, is de niet-commutatieve meetkunde abstracter van aard. Van bollen, cirkels of tetraëders kunt u zich een voorstelling maken. Al deze objecten bestaan uit punten (zeg maar, een punt is een plek op het object). Niet-commutatieve ruimten hoeven niet uit punten te bestaan, wat een voorstelling van deze ruimten onmogelijk maakt. Ik zal niet uitleggen wat niet-commutatieve meetkunde precies is, maar ik zal uitleggen wat we met *niet-commutativiteit* bedoelen. Dit begrip is later in deze samenvatting ook nog van belang.

Het zal jullie niet verbazen dat

$$3 \times 4 = 4 \times 3.$$

Met andere woorden, we kunnen 3 met 4 vermenigvuldigen of 4 met 3, maar de volgorde doet er niet toe. In beide gevallen is het antwoord 12. Dit geldt natuurlijk niet alleen voor de getallen 3 en 4. We kunnen 3 en 4 door twee willekeurig andere getallen vervangen en dan geldt nog steeds dat de volgorde niet uitmaakt. In formuletaal zeggen we dat

$$n \times m = m \times n, \quad \text{voor alle getallen } m, n.$$

Deze eigenschap van getallen wordt *commutativiteit* genoemd. In gewoon Nederlands: de volgorde doet er niet toe. Nu is het zo dat dit niet voor alle

[9] Dit staat niet los van hetzelfde probleem met de Laplaciaan aangezien het de Laplaciaan het kwadraat van de Dirac-operator is.

[10] Over ijktheorieën vertel ik later meer. Zwaartekracht zoals beschreven door de algemene relativiteitstheorie is *geen* ijktheorie. Er zit dus een fundamenteel verschil tussen de zwaartekracht en de overige krachten.

wiskundige operaties geldt. Binnen de natuur- en wiskunde geldt het volgende standaardvoorbeeld dat ik, ondanks het hoge clichégehalte, toch wil noemen: stel dat m betekent dat je in bad stapt en n dat je je kleren aan doet, en laten we zeggen dat $m \times n$ betekent dat we eerst m uitvoeren en dan n. Met deze afspraken zien we dat

$$m \times n \neq n \times m,$$

want in het laatste geval heb je natte kleren.[11]

Maar hoe heeft niet-commutativiteit nu met meetkunde te maken? Deze vraag zal ik nu helaas niet beantwoorden. Het enige wat ik er hier over wil zeggen is dat we bij een meetkundig object altijd een zogenoemde *algebra* kunnen construeren die altijd *commutatief* is. Een niet-commutatieve ruimte ontstaat wanneer we met een *niet-commutatieve* algebra werken. In het niet-commutatieve geval hebben we dan alleen een algebra en niet een bijbehorend meetkundig object. Immers, voor een meetkundig object is de algebra altijd *commutatief*. Deze generalisatie van meetkunde naar niet-commutatieve meetkunde is dus erg abstract, en u vraagt zich zeker af of dit ons wat oplevert. En dat doet het zeker!

De Dirac-operator is namelijk ook te generaliseren naar niet-commutatieve ruimten en nu ontstaat de magie.[12] Misschien herinnert u zich nog dat we door het tellen van de eigenfrequenties van de Dirac-operator op een meetkundig object de zwaartekrachtstheorie kunnen verkrijgen, maar dat de overige krachten niet hiermee verkregen worden. We combineren nu dit meetkundige object met een (goed gekozen) niet-commutatief deel. Door het tellen van eigenfrequenties van de Dirac-operator op deze gecombineerde ruimte krijgt men een formule die niet alleen de zwaartekracht beschrijft op het meetkundig object maar ook de ijktheorieën. Het opmerkelijke is dat de ijktheorieën hierbij uit het *niet-commutatieve deel* volgen! In deze zin correspondeert de zwaartekracht met de commutatieve component van de niet-commutatieve ruimte en de ijktheorie met de niet-commutatieve component.

Dit is een van de belangrijkste toepassingen van de niet-commutatieve meetkunde in de natuurkunde. Het bijzondere is dat de zwaartekracht en de ijktheorieën worden verkregen uit hetzelfde formalisme, namelijk het tellen van eigenfrequenties van de Dirac-operator. Dit is opmerkelijk omdat, zoals ik eerder vermeld had, zwaartekracht en ijktheorieën vanuit natuurkundig opzicht fundamenteel anders zijn. In het tweede deel van dit proefschrift heb ik, in samenwerking met Koen van den Dungen van de Australian National University en de University of Wollongong, deze beschrijving uitgebreid naar wat men noemt *globaal niet-triviale ijktheorieën*.

Het kan natuurlijk zijn dat bovenstaande u toch wat deed duizelen. Er kwamen waarschijnlijk nogal een hoop voor u onbekende termen voor. De boodschap die ik u wil geven laat zich als volgt samenvatten en hopelijk valt u ook op hoe

[11] Op de achterkant van dit proefschrift en op de legger zie je Pythagoras, een wiskundige uit de Griekse oudheid, met z'n kleren aan in bad stappen.

[12] Een niet-commutatieve ruimte bestaat dus in het algemeen uit (1.) een niet-commutatieve algebra, (2.) Dirac operator en (3.) (combinaties van) eigentrillingen. Gezamenlijk noemen we dit een *spectraal tripel* en dit vormt de kern van de niet-commutatieve meetkunde.

de natuur- en wiskunde elkaar beïnvloed hebben. De Dirac-operator is ontstaan in de *natuurkunde* als bewegingsvergelijking voor erg kleine deeltjes die ontzettend hard voortbewegen, soms wel met een snelheid die de lichtsnelheid nadert. De Dirac-operator bleek ook belangrijk te zijn in de *wiskunde*, en vooral in de meetkunde, mede doordat zijn kwadraat een Laplaciaan is. In de wiskunde kon men veel informatie uit meetkundige objecten halen door te kijken naar de lijst van eigenfrequenties van de Laplaciaan. Door nu de Laplaciaan door de Dirac-operator te vervangen, kan men door het optellen van de eigenfrequenties van de Dirac-operator, een *wiskundige operatie*, de zwaartekrachtstheorie uit de *natuurkunde* verkrijgen. Echter, om door het optellen van eigenfrequenties van een Dirac-operator de overige drie fundamentele krachten te verkrijgen, die door ijktheorieën beschreven worden, dient men een Dirac-operator op een *niet-commutatieve ruimte* te gebruiken!

Maar wat zijn ijktheorieën nu eigenlijk en wat bedoelen we met kwantisatie, de andere twee begrippen in de titel?

Kwantisatie

Hierboven heb ik al gesproken over klassieke mechanica en kwantummechanica. Daarbij heb ik opgemerkt dat de wetten van de kwantummechanica gelden voor erg kleine objecten en dat de wetten van de klassieke mechanica gelden voor onze alledaagse waarnemingen. Voor dit verschil is een theoretische verklaring nodig. Om geen tegenstrijdige theorieën te hebben, moet er bovendien een geleidelijke overgang zijn van de wetten van de kwantummechanica naar de wetten van de klassieke mechanica als de we lengteschalen opschroeven. Een belangrijke vraag die natuur- en wiskundigen zich stellen is hoe, gegeven een klassieke theorie, de bijbehorende kwantummechanische theorie er uit ziet. Het construeren van een kwantummechanische theorie bij een klassieke theorie wordt ook wel *kwantisatie* genoemd. Voor veel natuurkundige systemen is deze stap uit te voeren en de natuurkunde is op dit gebied erg succesvol gebleken. Echter, een vast recept voor het construeren van een kwantisatie ontbreekt nog. Vooral de kwantisatie van ijksystemen is wiskundig gezien verre van begrepen.[13]

IJktheorie en ijksystemen

IJktheorieën komen veelvuldig voor in de natuurkunde, met name in de theoretische hoge-energiefysica. Voor het Standaard Model van de elementaire deeltjes, dat de interacties tussen de tot nu toe bekende kleinste deeltjes beschrijft, vormen ze zelfs de belangrijkste onderdelen. Ik zal proberen een idee te geven van het principe van een ijktheorie aan de hand van een simpel voorbeeld dat gerelateerd is aan een ijktheorie bekend onder de naam *kwantumchromodynamica*. Dit voorbeeld lijkt misschien wat kinderachtig maar het is (in een wat ingewikkeldere vorm) zeker relevant voor de natuurkunde.

[13]De kwantisatie hangt af van een parameter $\hbar$ (je zou voor $\hbar$ kunnen denken aan de grootte van de lengteschalen, al is dit niet juist). Het plaatje met de verschillende groottes van $\hbar$ op de voorkant, representeert de kwantisatieprocedure.

Stelt u zich een kinderfeestje voor waar twaalf kinderen ingedeeld worden in vier groepjes van drie op de volgende manier. Ieder kind krijgt een petje op zijn hoofd. Het petje is rood, groen of blauw gekleurd en van elke kleur zijn er vier petjes. De opdracht voor de kinderen is dat ze nu vier groepjes mogen vormen van drie personen, maar dat in elk groepje elk kind een ander kleur petje moet dragen. Na verloop van tijd, de duur hangt af van de mate van medewerking van de kinderen, zullen er waarschijnlijk vier groepjes ontstaan elk bestaande uit drie kinderen waarbij elk kind in zo'n groepje een ander kleur hoofddeksel heeft. Wie er bij wie in het groepje komt, hebben de kinderen nu niet helemaal voor het uitkiezen. Immers, als jij en jouw beste vriendje een hoofddeksel dragen met de kleur rood, dan hebben jullie beide vette pech, want jullie zullen in verschillende groepjes komen. Nu zouden we er natuurlijk voor kunnen kiezen om iedereen met een rood petje zijn petje te laten wisselen met iemand met een blauw petje. Weliswaar is de situatie op het oog nu anders, maar deze verandering beïnvloedt de uitkomst niet. Welke groepjes gevormd kunnen worden, is in beide situaties gelijk. Als nu de natuurwet zou zijn dat elk kind in een groepje een ander kleur petje moet hebben, dan hangt dit alleen af van het feit hoeveel verschillende kleuren er zijn, maar de kleuren zelf zijn irrelevant.[14]

Het feit dat we de rode en blauwe petjes kunnen verwisselen (of de rode en groene, of de groene en blauwe) zonder dat de structuur van de situatie wordt aangepast, noemen we ook wel een *symmetrie* of een *symmetrietransformatie*. Deze symmetrietransformaties komen in de kwantumchromodynamica[18]

[14]Dit voorbeeld heeft als doel om aan te geven dat de situatie symmetrisch is onder verwisseling van kleuren, maar de 'natuurwet' die ik noemde geeft daadwerkelijk het idee weer achter een interessant kwantummechanisch verschijnsel, namelijk het Pauli-uitsluitingsprincipe. Het Pauli-uitsluitingsprincipe stelt dat twee (fermionische) ononderscheidbare[15] deeltjes niet alle eigenschappen gelijk hebben. Laten we voor het gemak daarom aannemen dat ons kinderfeestje bestaat uit een twaalfling of, beter nog, twaalf *identieke* klonen in identieke kleren (behalve dan de kleur van het petje).[16] Dan zijn we alleen in staat de kinderen te onderscheiden op basis van hun petje. Kinderen met dezelfde kleur pet hebben nu volledig gelijke eigenschappen en zouden volgens het Pauli-uitslutingsprincipe niet naast elkaar mogen staan. Er kunnen daardoor alleen groepjes van drie gevormd worden wanneer elk kind in het groepje een ander kleur petje draagt.

Men zou overigens kunnen aanvoeren dat we ook groepjes van twee kunnen maken, maar volgens een ander principe in kwantumchromodynamica komen alleen groepjes voor die *kleurloos* zijn (rood+groen+blauw wordt gezien als wit).[17] De naam *kleur* wordt overigens echt gebruikt als eigenschap voor een *quark*, een van de elementaire deeltjes in het Standaard Model. Kleur als eigenschap voor quarks werd geïntroduceerd toen er deeltjes gevonden werden die opgebouwd waren uit drie quarks die alle precies dezelfde eigenschappen hadden. Op grond van het Pauli-uitsluitingsprincipe zou dit echter niet mogen. Met de introductie van *kleurlading* werd dit probleem opgelost door elk van deze drie quarks een andere kleur toe te kennen, precies zoals we hierboven op het kinderfeestje gedaan hebben.

[15]verwarrend woord

[16]Dit is wat we in de fysica noemen een gedachte-experiment. Gelukkig is het meestal voldoende om het in dit soort voorbeelden bij gedachte-experimenten te laten zodat problemen met kinderbeschermingen, gebrek aan technische mogelijkheden of ethische commissies doorgaans voorkomen kunnen worden.

[17]Dit zou een verklaring kunnen zijn waarom Kwik, Kwek en Kwak onafscheidelijk zijn. Dit overigens geheel terzijde.

[18]het Griekse woord voor kleur is '$\chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha$'.

ook voor en het zijn deze symmetrieën die we ijksymmetrieën noemen. Voor de bijbehorende theorie wordt daarom de term *ijktheorie* gebruikt. Belangrijk bij de kwantisatie van dit soort theorieën is dat deze symmetrieën overgevoerd worden. Dus als de klassieke theorie deze symmetrie heeft, dan moet ook de bijbehorende kwantisatie deze symmetrie hebben. Het zijn juist deze symmetrieën die de kwantisatie van ijktheorieën lastig maken.

We spreken van een symmetrie in de natuurkunde wanneer de natuurkunde niet verandert onder zo'n symmetrietransformatie. Met andere woorden, we kunnen twee systemen die in de theorie verbonden zijn door een symmetrietransformatie in de praktijk niet onderscheiden. We zouden dus ook in de theorie al die verschillende toestanden die dezelfde natuurkundige situatie geven, als dezelfde toestand willen zien. Daarmee *reduceren* we als het ware het totaal aantal toestanden. Deze procedure staat ook wel bekend als *reductie*. Wanneer we ook kwantisatie in het verhaal betrekken, rijst natuurlijk de volgende vraag: moeten we vóór of ná kwantisatie reduceren? Het antwoord is dat een wiskundige vindt dat een goede definitie van kwantisatie (en reductie) zo moet zijn dat de volgorde van kwantiseren en reduceren niet uit maakt. Wanneer dit zo is, dan zeggen we dat *kwantisatie commuteert met reductie*.[19] Wanneer kwantisatie commuteert met reductie, dan maakt het in het volgende diagram

$$
\begin{tikzcd}
\text{klassiek systeem + symmetrieën} \arrow[r, "\text{kwantisatie}"] \arrow[d, "\text{reductie}"] & \text{kwantumsysteem + symmetrieën} \arrow[d, "\text{reductie}"] \\
\text{gereduceerd klassiek systeem} \arrow[r, "\text{kwantisatie}"] & \text{gereduceerd kwantumsysteem}
\end{tikzcd}
$$

niet uit of we linksom of rechtsom van linksboven naar rechtsonder gaan. Zo'n diagram als hierboven heet in de wiskunde ook wel een *commutatief diagram*.

IJktheorieën laten zich lastig kwantiseren en wiskundigen weten nog niet hoe dit in het algemeen moet. De situaties in de natuurkunde zijn wiskundig erg lastig. Daarom bekijken we eerst eenvoudigere situaties, zoals ijktheorieën op een ruimte die slechts uit (eindig veel) losse punten bestaat. Dit is ook wat we in dit proefschrift doen. In het eerste deel van dit proefschrift geven we een kwantisatie voor een speciale klasse van wiskundige ruimten, welke in de natuurkunde overeenkomen met ijktheorieën op een ruimte die bestaat uit vier losse punten. Ook laten we zien dat in deze voorbeelden kwantisatie commuteert met reductie. Voor de wiskundigen onder de lezers: we bekijken de Hilbertruimtekwantisatie van coraaksbundels van compacte, samenhangende Lie-groepen met daarop de actie die geïnduceerd wordt door de actie van de Lie-groep op zichzelf door conjugatie.

[19] Het woord 'commuteren' is verwant aan het woord 'commutativiteit'. Hier spreken we van commutativiteit omdat de volgorde van kwantiseren en reduceren er niet toe doet.